基礎科目

1 微分積分

1. 次の極限値をそれぞれ求めよ．

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{1/x^2}$

2. 次式で定められる x の関数 y について，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を求めよ．ここで，$\log(\bullet)$ は自然対数を表す．

$$\log xy - x + y = 0$$

3. 次に示す xyz 空間の領域 D を考える．以下の問いに答えよ．

$$D = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1,\ z^2 \leq xy \right\}$$

(1) 領域 D を図示せよ．

(2) 領域 D の体積を求めよ．

4. 次に示す微分方程式をそれぞれ解け．

(1) $y' - y^2 - y = 0$

(2) $\displaystyle xy' - y + x\cos^2 \frac{y}{x} = 0$

基礎科目

2 線形代数

次の行列$\boldsymbol{A}$およびベクトル$\boldsymbol{b}$を考える．

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 1 & k & 1\\ k & 1 & 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

ただし，kは実定数である．以下の問いに答えよ．

(1) 行列式$|\boldsymbol{A}|$を求めよ．また，行列$\boldsymbol{A}$が特異であるようなkの値をすべて求めよ．

(2) 連立一次方程式$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$の解が無限個存在するような$k$の値を特定し，そのときの一般解を求めよ．加えて，解が存在しないようなkの値を特定し，その根拠を述べよ．

(3) $k=0$とした行列$\boldsymbol{A}$を$\boldsymbol{A}_0$とする．$\boldsymbol{A}_0$のすべての固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めよ．さらに$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}$を満たす正則行列$\boldsymbol{P}$と対角行列$\boldsymbol{D}$を求めよ．

(4) $k=2$とした行列$\boldsymbol{A}$を$\boldsymbol{A}_2$とする．$\mathbb{R}^3$内の単位立方体(1辺の長さが1の立方体)が，線形写像$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}$によって写された後の図形の体積$V$を求めよ．

(5) 次のベクトル$\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3\}$が$\mathbb{R}^3$の基底であることを示せ．また，ベクトル$\boldsymbol{b}$をこの基底を用いた座標系で表せ（すなわち，$\boldsymbol{b}=c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+c_3\boldsymbol{v}_3$となる係数$c_1,c_2,c_3$を求めよ）．

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

基礎科目

3 確率統計

1. $P(A) > 0$ とする．このとき，事象 A, B が独立である（すなわち，$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ である）ための必要十分条件は，$P(B \mid A) = P(B)$ が成り立つことである．これを証明せよ．

2. 状態空間を $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ とする確率過程 $\{X_t\}_{t=0,1,2,\cdots}$ が，時不変の推移確率 $\Pr(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = p_{i,j}$ $(i, j \in \mathcal{S}; t = 0, 1, 2, \cdots)$ を持つ離散時間マルコフ連鎖であるとする．推移確率行列の具体的な値を

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

で与える．

(1) 初期状態が $X_0 = 1$ であるとき，時点 $t = 2$ に状態 2 となる確率 $\Pr(X_2 = 2 \mid X_0 = 1)$ を求めよ．

(2) このマルコフ連鎖の定常分布 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ を求めよ．

3. 観測データ $\{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \cdots, n\}$ に対して，線形回帰モデル

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

を考える．なお，$x_1, x_2 \cdots, x_n$ は外生的な固定値とする．誤差項 ε_i は互いに独立で

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

に従うものとする．ここに，$N(0, \sigma^2)$ は正規分布を意味し，その確率密度関数は

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

で与えられる．

(1) 母数 $(\beta_0, \beta_1, \sigma^2)$ の尤度関数 $\mathcal{L}(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 \mid y_1, y_2, \cdots, y_n)$ を導出せよ．

(2) β_0，β_1，σ^2 の最尤推定量 $\hat{\beta}_0$，$\hat{\beta}_1$，$\hat{\sigma}^2$ をそれぞれ求めよ．

(3) (2) で求めた $\hat{\sigma}^2$ が不偏推定量でない理由を説明せよ．

基礎科目

4 生物・生態学

1. 細胞の構造と機能に関連する以下の問いに答えよ.

(1) 生体膜の基本構造を説明せよ．そのうえで，それが細胞膜として機能する機構を説明せよ.

(2) 真核細胞における分泌タンパク質の合成と分泌が，複数の細胞小器官の協調によって行われる過程を説明せよ.

2. 食物連鎖・食物網に関連する以下の問いに答えよ.

(1) 栄養段階の概念を説明せよ.

(2) 二次消費者の除去が生物群集構造に及ぼしうる影響を，食物連鎖の動態の観点で説明せよ.

(3) 食物連鎖の概念を食物網に拡張することではじめて捉えることが可能となる生態学的現象を 1 つ挙げて説明せよ．その際，実在の生態系・生物分類群を例として示しながら説明すること.